FSJES-AC

RECHERCHE OPERATIONNELLE

Semestre 6

Filière : Gestion E1-E2-E3

Filière : Economie et Gestion E1 -E2

PROGRAMMATION LINEAIRE - Complément –

- Partie III : Algorithme du simplexe
- Partie IV : Post – Optimalité
    - Dualité
    - Analyse de sensibilité
- Exercices avec solutions

M.ATMANI M .EZZAHAR

A/U : 2019 - 2020

Remarque : la partie I : Formulation déjà traitée

la partie II : Résolution graphique déjà traitée

Partie III

ALGORITHME DU SIMPLEXE

I - Introduction

La méthode du simplexe est un algorithme qui permet la recherche de la solution optimale d'un programme linéaire donné.

Dans la partie précédente (Partie II) on a présenté la résolution graphique d'un PL à deux variables , mais dans d'autres problèmes on a plus de deux variables , d'où la nécessité d'une procédure algébrique pour résoudre des PL avec plus de deux variables « Cette méthode appelée méthode du simplexe ».

II – Méthode du simplexe « MAXIMISATION »

Dans ce paragraphe on présentera la méthode du simplexe pour un problème de maximisation sous des contraintes de types inférieur ou égal.

Donc on présente la méthode à l'aide d'un exemple illustratif.

$$Max\ Z = 25\ x_1 + 15\ x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 240 \\ 3x_1 + 1x_2 \leq 140 \\ x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Première étape :

Transformer le PL sous sa forme standard c à d transformer les inégalités sous forme des égalités en introduisant des variables d'écarts (e_i)

$2x_1 + 2x_2 \le 240 \longrightarrow 2x_1 + 2x_2 + 1e_1 = 240$

$3x_1 + 1x_2 \le 140 \longrightarrow 3x_1 + 21 + 1e_2 = 140$

e_1 et e_2 peuvent être interpréter comme suit :

e_1 : la qté de ressource 1 e_2 : la qté de ressource 2

Les variables d'écarts n'ont aucun effet sur la fonction objectif

Le modèle s'écrit donc sous sa forme standard :

$$Max\ Z = 25\, x_1 + 15\, x_2 + 0e_1 + 0e_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 1e_1 = 240 \\ 3x_1 + 21 + 1e_2 = 140 \\ x_1 \ge 0 , x_2 \ge 0, e_1 \ge 0 , e_2 \ge 0 \end{cases}$$

La question qui se pose c'est comment identifier une solution optimale ?

La réponse sera donnée par les étapes suivantes

Deuxième étape :

La deuxième étape consiste à poser le premier tableau de simplexe à l'origine.

A l'origine $x_1 = 0 , x_2 = 0$ donc $e_1 = 240$ et $e_2 = 140$

x_1 et x_2 sont des variables **HORS BASE** et e_1 et e_2 sont des variables de **BASE**.

TAB : 0

Cj			25	15	0	0
	VB	qté	x_1	x_2	e_1	e_2
0	e_1	240	2	2	1	0
0	e_2	140	3	2	0	1

Dans le TAB 0 on a placé en première ligne les coefficients Cj des variables x_1 , x_2 , e_1 et e_2 dans la fonction objectif.

La troisième ligne contient les coefficients liés à la première contrainte : $2x_1 + 2x_2 + 1e_1 = 240$

La quatrième ligne contient les coefficients liés à la première contrainte : $3x_1 + 21 + 1e_2 = 140$

La première colonne indique les contributions des variables de base dans la fonction objectif .

Troisième étape :

Dans cette étape , on donne la méthode itérative pour la détermination de la solution optimale d'un PL.

- Première Itération

- Déterminer la variable entrante - Ve - « Colonne du pivot »

TAB 1

Cj			25	15	0	0
	VB	qté	x_1	x_2	e_1	e_2
0	e_1	240	2	2	1	0
0	e_2	140	3	2	0	1
	Zj		0	0	0	0
	Cj - Zj		25	15	0	0

La variable entrante c'est la variable qui correspond à la plus grande valeur positive de Cj – Zj (le plus grand profit marginal)

Explication

Zj : correspond aux coefficients des variables de base multiplié par les coefficients de la variable dans les contraintes deux à deux. ($Z\ 1 = 2\times 0 + 3\times 0 = 0$)

A l'origine (au départ) on a x1=0 c à d x1 est hors base (on ne produit pas le produit type 1) si maintenant on augment x1 d'une unité on a une diminution de e1 de 2 unités et e2 de 3 unités.

L'effet d'une telle variation sur la fonction objectif est 25 – (0x1 + 0x2) = C1 – Z1

Les Cj – Zj sont données par la dernière ligne du tableau de simplexe .cette variation indique le profit marginal provenant de la production d'une unité .

Donc si x1 augmente d'une unité le profit augmente de 25 et si x2 augmente d'une unité le profit augmente de 15.

Alors dans notre exemple la plus grande valeur positive est 25 donc la variable entrante c'est x1.

- Déterminer la variable sortante - Vs - « Ligne du pivot »

On détermine la variable sortante en divisant les valeurs de la quantité par les valeurs correspondantes dans la colonne de la variable entrante (on obtient une nouvelle colonne R_T) ratio test.

On sélectionne la ligne avec le plus petit quotient positif pout R_T.

On remarque que l'augmentation de x1 est restreinte par deux limites 240/2 et 140/3

Alors la ressource 1 permet de produire 240/2 produit type 1 par contre la ressource 2 permet de produire 140/3 . donc on se limite à 140/3 par conséquent on choisit comme variable sortante e_2.

TAB 2

Cj			25	15	0	0	
	VB	qté	x_1	x_2	e_1	e_2	R_T
0	e_1	240	2	2	1	0	240/2
0	e_2	140	3	2	0	1	140/3
	Zj		0	0	0	0	
	Cj - Zj		25	15	0	0	

- <u>Développer un nouveau tableau de simplexe</u>

Ce nouveau tableau est déterminé à l'aide de la méthode de changement de base suivante (méthode de pivot)

Le pivot c'est l'intersection entre la colonne de la variable entrante et la ligne de la variable sortante

Remplir le nouveau tableau par la règle de pivotage :

1 – Diviser la ligne du pivot sur la valeur de pivot

2 - remplir les autres cases par la règle suivante : $N_v = A_v - \frac{P_L \times P_C}{Pivot}$

N_v : *nouvelle valeur* A_v : Ancienne valeur

P_L : projection de l'ancienne valeur sur la ligne de pivot

P_C : projection de l'ancienne valeur sur la colonne de pivot.

TAB 3

Cj			25	15	0	0
	VB	qté	x_1	x_2	e_1	e_2
0	e_1	440/3	0	4/3	1	-2/3
25	x_1	140/3	1	1/3	0	1/3
	Zj		25	25/3	0	25/3
	Cj-Zj		0	20/3	0	-25/3

Exemple de calcul : on a diviser toute la ligne de pivot sur la valseur de pivot.

Pour les autres valeurs exp : $\frac{440}{3} = 240 - \frac{140 \times 2}{3}$;; $\frac{4}{3} = 2 - \frac{1 \times 2}{3}$

Remarque : les nouvelles valeurs de la colonne de pivot sont nuls

FIN D'ITERATION TEST

Si les Cj – Zj sont tous inférieurs ou égal à zéro on arrête la solution est optimale , si non on développe une nouvelle itération.

Dans notre exemple il reste encore une valeur positive 20/3 , donc il faut développer une nouvelle itération.

- <u>Deuxième Itération</u>

Cj			25	15	0	0	
	VB	qté	x_1	x_2	e_1	e_2	RT
0	e_1	440/3	0	4/3	1	-2/3	110
25	x_1	140/3	1	1/3	0	1/3	140
	Zj		25	25/3	0	25/3	
	Cj-Zj		0	20/3	0	-25/3	

La variable entrante Ve c'est x2 et la variable sortante Vs c'est e1. Le pivot c'est 4/3.

Par la même règle de pivotage on remplit un nouveau tableau :

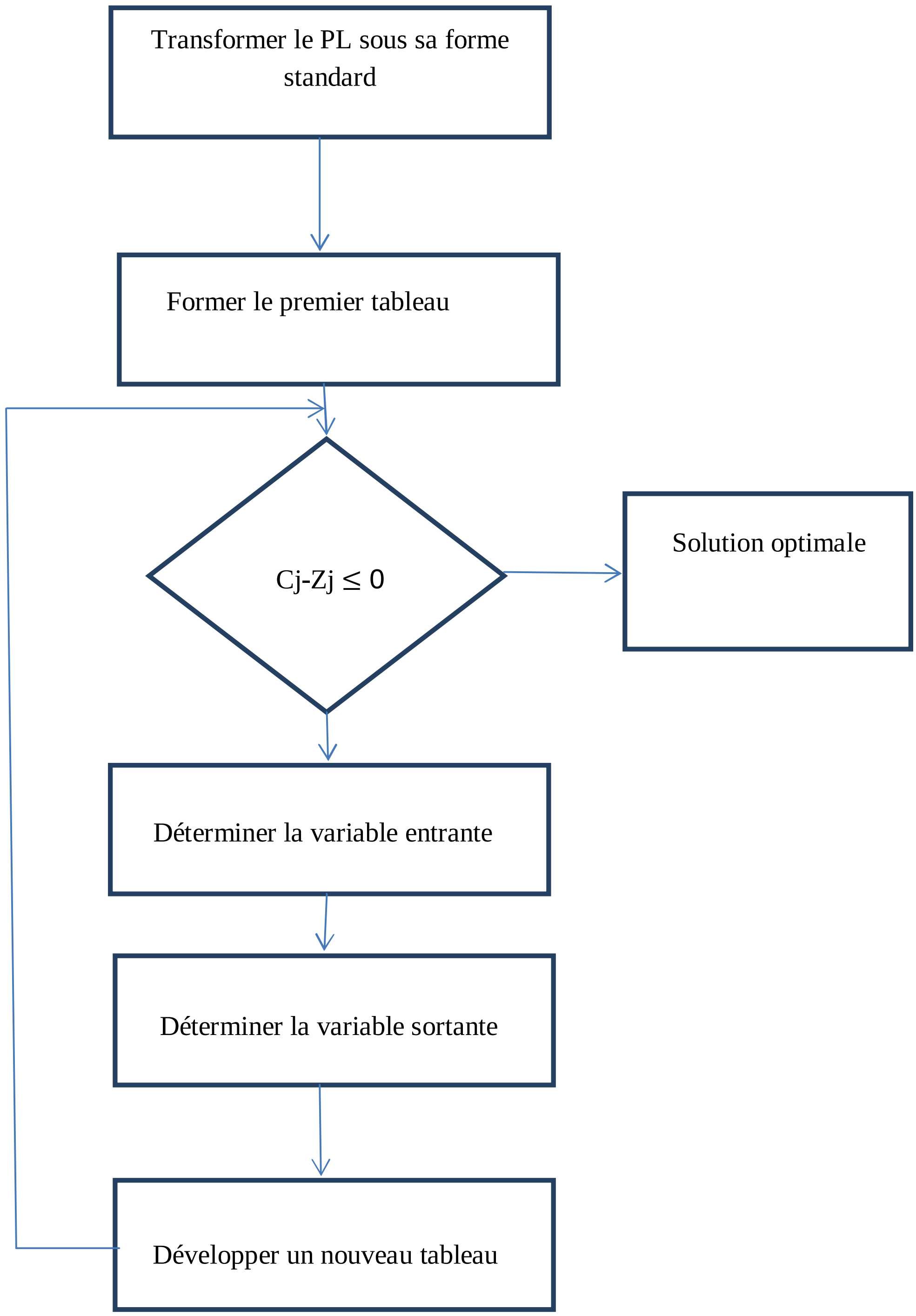
Cj			25	15	0	0
	VB	qté	x_1	x_2	e_1	e_2
0	x_2	110	0	1	3/4	-1/2
0	x_1	10	1	0	-1/4	1/2
	Zj		25	15	5	5
	Cj - Zj		0	0	-5	-5

Cj – Zj ≤ 0 donc la solution est optimale.

$$x_1^* = 10 \quad ; \quad x_2^* = 110 \quad ; \quad Z^* = 1900$$

En résumé pour résoudre un Pl on procède comme suit :

1) Transformer le PL sous sa forme standard
2) Former le tableau initiale
3) Itérations a) déterminer la variable entrante
   b)déterminer la variable sortante et le pivot
   c) développer un nouveau tableau par la règle de pivotage
   d) si la solution est optimale on arrête si non on répète 3).



III – Méthode du simplexe « MINIMISATION »

On procédera à l'illustration de la méthode sur l'exemple suivant :

$$Min\ Z = 24\,x_1 + 20\,x_2$$

$$x_1 + x_2 \geq 30$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 40$$

$$x_1 \geq 0\ ;\ x_2 \geq 0$$

Première étape :

Cette étape consiste à convertir le PL sous sa forme standard

$x_1 + x_2 \geq 30 \longrightarrow x_1 + x_2 - e_1 = 30$

A l'origine $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$,

$\boldsymbol{e_1 = -30}$ ce qui est non conforme à l'hypothèse de non négativité des variables , d'où la nécessité d'introduire des variables artificielles (A_i)

Donc $x_1 + x_2 \geq 30 \longrightarrow x_1 + x_2 - e_1 + A1 = 30$

La variable artificielle est une variable de base , ceci indique que la solution est non réalisable.

- Les variables d'écarts (ei) ont un effet nul sur la fonction objectif
- **On affecte aux variables artificielles (Ai) une contribution unitaire M** « M étant très grand qui tend vers plus l'infini »

Le PL devient :

$$Min\, Z = 24\, x_1 + 20\, x_2 + 0e1 + 0e2 + MA1 + M\, A2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - e_1 + A1 = 30 \\ x_1 + 2x_2 - e_1 + A2 = 40 \\ \text{x1 , x2 , e1 , e2 , A1 , A2} \geq 0 \end{cases}$$

à l'origine x1 = 0 , x2 = 0 , e1 = 0 , e2 = 0 et A1 = 30 et A2 = 40

donc x1 , x2 , e1 ,e2 sont hors base et A1 et A2 sont des variables de base.

Deuxième étape :

Tableau initial :

Cj			24	20	0	0	M	M
	VB	qté	x1	x2	e1	e2	A1	A2
M	A1	30	1	1	-1	0	1	0
M	A2	40	1	2	0	-1	0	1

Troisième étape :

Elle consiste à faire les itérations nécessaires pour trouver la solution optimale .

- <u>Première Itération</u>

La minimisation de Z est équivalente à la maximisation de (- Z) , donc on peut utiliser la méthode de maximisation en y changeant le critère de sélection de la variable entrante (Cj – Zj) par (Zj – Cj).

Cj			24	20	0	0	M	M	
	VB	qté	x1	x2	e1	e2	A1	A2	RT
M	A1	30	1	1	-1	0	1	0	30/1
M	A2	40	1	2	0	-1	0	1	40/2
	Zj		2M	3M	-M	-M	M	M	
	Zj-Cj		2M-24	3M-20	-M	-M	0	0	

On développe un nouveau tableau par la règle de pivotage déjà appliquée dans le cas de maximisation.

Cj			24	20	0	0	M	M	
	VB	qté	x1	x2	e1	e2	A1	A2	RT
M	A1	10	1/2	0	-1	1/2	1	-1/2	20
20	x2	20	1/2	1	0	-1/2	0	1/2	-40
	Zj		M/2 + 10	20	-M	M/2 - 10	M	-M/2 + 10	
	Zj-Cj		M/2 - 14	0	-M	M/2 - 10	0	-3/2 M +10	

Fin d'itération test est que tous les Zj – Cj sont ≤ 0 ?

Non il reste encore des **Zj – Cj positifs** M/2 – 14 et M/2 – 10.

- <u>Deuxième Itération</u>

On détermine la variable entrante et la variable sortante et le pivot

Cj			24	20	0	0	M	M	
	VB	qté	x1	x2	e1	e2	A1	A2	RT
M	A1	10	1/2	0	-1	1/2	1	-1/2	20
20	x2	20	1/2	1	0	-1/2	0	1/2	-40
	Zj		M/2 + 10	20	-M	M/2 - 10	M	-M/2 + 10	
	Zj-Cj		M/2 - 14	0	-M	M/2 - 10	0	-3/2 M +10	

NB : La variable sortante correspond à RT le plus petit positif

une fois Ve , Vs et le pivot sont déterminés , on développe un nouveau tableau (règle de pivotage)

Cj			24	20	0	0	M	M
	VB	qté	x1	x2	e1	e2	A1	A2
0	e2	20	1	0	-2	1	2	-1
20	x2	30	1	1	-1	0	1	1/2
	Zj		20	20	-20	0	20	10
	Zj - Cj		-4	0	-20	0	20 - M	10 - M

Fin d'itération , tous les Zj – Cj sont ≤ 0 , donc le tableau est optimale

$x_1^* = 0$, $x_2^* = 30$, $e_1 = 0$, $e_2 = 20$, $Z^* = 600$

Partie IV

POST – OPTIMALITE

Dans les parties précédentes on s'est intéressé à la formulation et à la résolution des problèmes (résolution graphique et simplexe). Dans cette partie on va s'intéresser à l'analyse (surtout économique de la solution optimale. On présentera tout d'abord la notion de dualité en programmation linéaire puis on présentera l'analyse de sensibilité de la solution optimale aux variations des coefficients des variables dans la fonction objectif et aux variations dans les second membres des contraintes.

I - DUALITE

A tout programme linéaire , on associe un second programme linéaire appelé dual du premier.

Le dual est en relation étroite avec le premier programme (primal) , la solution de l'un des PL est déterminée à partir de l'autre.

Exemple

Une entreprise de menuiserie produit des tables , des chaises et des armoires , les ressources de cette entreprises étant limitées par trois contraintes . Le directeur de la production formule le problème de la manière suivante :

$$\boldsymbol{Max\ Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60} \quad \boldsymbol{(\ Bois\ )} \\ \boldsymbol{2x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 40} \quad \boldsymbol{(\ Heures\ d'assemblage\ )} \\ \boldsymbol{1x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80} \quad \boldsymbol{(\ Heures\ de\ finition\ )} \\ x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0 , x_3 \geq 0 \end{cases}$$

x_1 : *nombre de tables fabriquées*

x_2 : *nombre de chaises fabriqués*

x_3 : *nombre d'armoiresfabriquées*

En utilisant la méthode du simplexe et en effectuant les itérations nécessaires , on trouve le tableau optimal suivant :

Cj			2	4	3	0	0	0
	VB	qté	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3
4	x_2	20/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
3	x_3	50/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	e_3	80/3	-5/3	0	0	-2/3	-1/3	1
	Zj	230/3	23/6	4	3	5/6	2/3	0
	Cj - Zj		-11/6	0	0	-5/6	-2/3	0

La solution optimale donnée par le tableau ce dessus est la suivante :

$$\boldsymbol{x_1^* = 0} \; , \quad \boldsymbol{x_2^* = \frac{20}{3}} \; , \quad \boldsymbol{x_3^* = \frac{50}{3}} \; , \quad \boldsymbol{e_1 = 0} \; , \quad \boldsymbol{e_2 = 0} \; , \quad \boldsymbol{e_3 = \frac{80}{3}} \; , \quad \boldsymbol{Z^* = 230/3}$$

A - INTERPRETATION DES Cj - Zj

D'après la solution optimale

$e_1 = 0$ *c à d* toute la quantité du bois est utilisée dans la production

$e_2 = 0$ *c à d* toute la quantité des heures d'assemblage est utilisée dans la production

$e_3 = \frac{80}{3}$ c à d après optimisation il reste encore une quantité de $\frac{80}{3}$ des heures de finition.

D'autre part :

<u>Pour la première ressource (bois : e1)</u>

on a : C4 – Z4 = - 5/6 c à d si on n'utilise pas une unité de bois la valeur de Z diminue de 5/6. Et si on dispose d'une unité supplémentaire de bois (on utilise l'unité dans la production) la valeur de Z augmente de 5/6

En résumé si on dispose d'une unité de bois supplémentaire on peut l'utilisé dans la production et obtenir 5/6 de plus dans Z. donc on n'est pas disposéà payer plus de 5/6 pour une unité de bois.

La valeur 5/6 est appelé valeur marginale d'une unité de bois .

<u>Pour la deuxième ressource (heures d'assemblage : e2)</u>

on a : C5 – Z5 = - 2/3 c à d si on n'utilise pas une heures d'assemblage la valeur de Z diminue de 2/3. Et si on dispose d'une heure supplémentaire d'assemblage (on utilise l'unité dans la production) la valeur de Z augmente de 2/3

En résumé si on dispose d'une heure d'assemblage supplémentaire on peut l'utilisé dans la production et obtenir 2/3 de plus dans Z. donc on n'est pas disposé à payer plus de 2/3 pour une heure d'assemblage.

La valeur 2/3 est appelé valeur marginale d'une heure d'assemblage .

Pour la troisième ressource (heures de finition : e3)

C6 – Z6 = 0 dans ce cas la valeur marginale d'une heure de finition est 0.

B - LE PROBLEME DUAL

Le programme dual est un programme associé au premier (primal).

Comment interpréter ce programme dual ?

On veut placer une valeur monétaire sur les ressources . supposons qu'un autre producteur s'intéresse à l'achat de toutes les ressources . A quels prix l'entreprise peut céder ses ressources ?

Soit y_1 : le prix d'une unité de bois

y_2 : le prix d'une heure d'assemblage

y_3 : le prix d'une heure de finition

L'objectif de l'acheteur est minimiser le prix à payer pour toutes ces ressources . la fonction objectif de l'acheteur (dual) est :

$$\boldsymbol{Min\ Z' = 60y_1 + 40\ y_2 + 80\ y_3}$$

Mais cet acheteur (dual) sait que le vendeur (primal) n'acceptera pas n'importe quel prix .

En fait le vendeur ne cédera ses ressources que si le revenu rapporté par la vendte des ressources nécessaires à la production d'une unité d'un produit donné , est supérieur ou égal au revenu engendré par la production de cette unité et sa vente.

Dans notre exemple : la production **d'une table** nécessite 3 unités de bois , 2 heures d'assemblage et 1 heure de finition. Le revenu engendré par la vente de ces ressources est $3y_1 + 2y_2 + 1y_3$

Mais le revenu engendré par la production et la vente d'une table est 2 unité monétaire. donc une contrainte imposée par le primal sur le dual est : $3y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 2$

- Même analyse pour la chaise : $4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 4$
- Même analyse pour l'armoire $2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 3$

Evidemment les prix de vente des ressources sont positifs.

Le programme dual est le suivant :

$$\boldsymbol{Min\ Z' = 60y_1 + 40\ y_2 + 80\ y_3}$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 2 \\ 4y_1 + 1y_2 + 3y_3 \geq 4 \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ y_1 \geq 0\ , y_2 \geq 0\ , y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Primal

$$\boldsymbol{Max\ Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3}$$
$$\boldsymbol{3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60}$$
$$\boldsymbol{2x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 40}$$
$$\boldsymbol{1x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80}$$
$$x_1 \geq 0\ , x_2 \geq 0\ , x_3 \geq 0$$

solution

Cj			2	4	3	0	0	0
	VB	qté	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3
4	x_2	**20/3**	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
3	x_3	**50/3**	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	e_3	**80/3**	-5/3	0	0	-2/3	-1/3	1
	Zj	230/3	23/6	4	3	5/6	2/3	0
	Cj - Zj		-11/6	0	0	-5/6	-2/3	0

$x_1 = 0$; $x_2 = \frac{20}{3}$; $x_3 = 50/3$

e1 = 0 ; e2 = 0 ; e3 = 80/3

Z* = 230/3

Tableau optimal primal

Dual

$$\boldsymbol{Min\ Z' = 60y_1 + 40\ y_2 + 80\ y_3}$$
$$\boldsymbol{3y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 2}$$
$$\boldsymbol{4y_1 + 1y_2 + 3y_3 \geq 4}$$
$$\boldsymbol{2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 3}$$
$$y_1 \geq 0\ , y_2 \geq 0\ , y_3 \geq 0$$

solution

Cj			60	40	80	0	0	0
	VB	qté	y_1	y_2	y_3	e'_1	e'_2	e'_3
60	y_1	5/6	1	0	2/3	0	-1/3	1/6
0	e'_1	11/6	0	0	5/3	1	-1/3	-5/6
40	y_2	2/3	0	1	1/3	0	1/3	-2/3
	Z'j	230/3	60	40	160/3	0	- 20/3	- 50/3
	Z'j – C'j		**0**	**0**	**-80/3**	**0**	**- 20/3**	**- 50/3**

Y1 = 5/6 ; y2 = 2/3 ; y3 = 0

e'1 = 11/6 ; e'2 = 0 ; e'3 = 0

Z'* = 230/3

Tableau optimal dual

On remarque que la solution optimale du dual peut etre déduite de la solution du primal de la manière suivante :

SOLUTION PRIMAL											
VARIABLES						Cj - Zj					
x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	C1-Z1	C2-Z2	C3-Z3	C4-Z4	C5-Z5	C6-Z6
0	20/3	50/3	0	0	80/3	-11/6	0	0	-5/6	-2/3	0

0	-20/3	-50/3	0	0	-80/3	11/6	0	0	5/6	2/3	0
Z'4-C'4	Z'5-C'5	Z'6-C'6	Z'1-C'1	Z'2-C'2	Z'3-C'3	e'1	e'2	e'3	y_1	y_2	y_3
Z'j – C'j						VARIABLES					
SOLUTION DUALE											

En résumé : la valeur de Cj – Zj pour une variable d'écart du primal correspond à la valeur de yi (la variable de décision du dual) qui lui associée :

Pour e1 on a C4 – Z4 = - 5/6 ---------------------------------- y1 = $|-5/6|$ = 5/6

Pour e2 on a C5 – Z5 = - 2 /3 ----------------------------------- y2 = $|-2/3|$ = 2/3

Pour e3 on a C6 – Z6 = 0 -- y3 = $|0|$ = 0

Pour x1 on a C1 – Z1 = - 11/6 -------------------------------------- e'1 = $|-11/6|$ = 11/6

Pour x2 on a C2 – Z2 = 0 --------------------------------------- e'2 = $|0|$ = 0

Pour x3 on a C3 – Z3 = 0 --------------------------------------- e'3 = $|0|$ = 0

Formulation du dual d'un programme linéaire :

Pour déterminer le dual d'un PL on doit suivre les règles suivantes :

- Si le primal est un PL de maximisation sous contraintes du type inférieur ou égal , alors le dual est un PL de minimisation avec contraintes du type supérieur ou égal et vice versa.
- A toute contrainte du primal on associe une variable dans le dual et à toute variable du primal on associe une contrainte du dual.
- On écrit le dual d'une manière similaire à celle développée dans la partie précédente.

La solution du dual correspond aux Cj – Zj des variables d'écarts dans le primal en valeur absolue.

ANALYSE DE SENSIBILITE

Dans une première partie , on présentera une analyse de sensibilité de la solution optimale aux variations des coefficients des variables de décisions dans la fonction objectif . dans une seconde partie on effectuera une analyse de la sensibilité de la solution optimale due aux variations dans les seconds membres des contraintes.

- Analyse de sensibilité sur les coefficients dans la fonction objectif Z

On cherche à déterminer un intervalle dans lequel peut varier Cj sans que la solution optimale ne change.

Exemple :

$$\boldsymbol{Max\ Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3}$$

$$\boldsymbol{3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60 \quad (\ Bois\ )}$$

$$\boldsymbol{2x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 40 \quad (\ Heures\ d'assemblage\ )}$$

$$\boldsymbol{1x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 \quad (\ Heures\ de\ finition\ )}$$

$$x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0 , x_3 \geq 0$$

Solution optimale :

Cj			2	4	3	0	0	0
	VB	qté	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3
4	x_2	20/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
3	x_3	50/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	e_3	80/3	-5/3	0	0	-2/3	-1/3	1
	Zj	230/3	23/6	4	3	5/6	2/3	0
	Cj - Zj		-11/6	0	0	-5/6	-2/3	0

Considérons une variation du coefficient C_2 de 4 à 4+Δ . En remplaçant dans le tableau optimale 4 par 4+Δ .

Cj			2	4+Δ	3	0	0	0
	VB	qté	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3
4+Δ	x_2	20/3	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
3	x_3	50/3	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	e_3	80/3	-5/3	0	0	-2/3	-1/3	1
	Zj	230/3 +20/3 Δ	23/6 +1/3 Δ	4+Δ	3	5/6 +1/3 Δ	2/3 - 1/3 Δ	0
	Cj - Zj		-11/6- 1/3 Δ	0	0	-5/6 - 1/3 Δ	-2/3 +1/3 Δ	0

La solution donnée par ce tableau reste optimale si :

$-11/6 - 1/3\,\Delta \leq 0$

$-5/6 - 1/3\,\Delta \leq 0$

$-2/3 + 1/3\,\Delta \leq 0$

Donc : $-11/6 - 1/3\,\Delta \leq 0$ ------------------------- $\Delta \geq -11/2$

$-5/6 - 1/3\,\Delta \leq 0$ ------------------------- $\Delta \geq -5/2$

$-2/3 + 1/3\,\Delta \leq 0$ --------------------------- $\Delta \leq 2$

Ce qui donne : $-5/2 \leq \Delta \leq 2$

$3/2 \leq 4 + \Delta \leq 6$

La solution reste optimale tant que C2 reste entre 3/2 et 6 .

- Analyse de sensibilité sur les seconds membres des contraintes

On cherche à déterminer dans quel intervalle on peut varier une quantité Qi de ressource sans que la solution optimale change.

Exp :

$$\boldsymbol{Max\ Z = \ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3}$$

$$\boldsymbol{3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60 \ \ (\ Bois\ )}$$

$$\boldsymbol{2x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 40 \ \ (\ Heures\ d'assemblage\ )}$$

$$\boldsymbol{1x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 \ \ (\ Heures\ de\ finition\ )}$$

$$x_1 \geq 0\,,\, x_2 \geq 0\,,\, x_3 \geq 0$$

Soit un changement de Q1 de 60 à $60 + \Delta$

Dans le premier tableau on remplace 60 par $60 + \Delta$.

Dans le tableau optimal la colonne correspondant à e1 nous donne les coefficients de Δ dans la colonne des quantités .

Cj			2	4	3	0	0	0
	VB	qté	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3
4	x_2	$20/3 + 1/3\,\Delta$	1/3	1	0	1/3	-1/3	0
3	x_3	$50/3 - 1/6\,\Delta$	5/6	0	1	-1/6	2/3	0
0	e_3	$80/3 - 2/3\,\Delta$	-5/3	0	0	-2/3	-1/3	1
	Zj	230/3	23/6	4	3	5/6	2/3	0
	Cj - Zj		-11/6	0	0	-5/6	-2/3	0

La base x_2 , x_3 , e_3 reste optimale tant que :

$20/3 + 1/3\,\Delta \geq 0$, $50/3 - 1/6\,\Delta \geq 0$, $80/3 - 2/3\,\Delta \geq 0$

C à d $-20 \leq \Delta \leq 40$

Donc $40 \leq 60 + \Delta \leq 100$

$40 \leq Q1 \leq 100$

Tant que la qté de bois reste entre 40 et 60 unités , les valeurs marginales des ressources restent valables.

EXERCICES AVEC SOLUTIONS

EXERCICE : N°1 - FORMULATION

Une usine fabrique deux produits A et B à partir de trois matières premières M1 ,M2 et M3. Les avec caractéristiques suivantes :

	A	B	STOCKS
M1	5	1	8
M2	1	2	7
M3	0	1	3
GAINS	4	5	

Solution

x_1 la Q^té^ de A

x_2 " " B.

$$MAX\ Z = 4x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 1x_2 \leq 8 \\ 1x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ 0x_1 + 1x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 ; x_2 \geq 0$$

EXERCICE : N°2 - FORMULATION

Un chef de rayon dans un supermarché dispose de trois stocks d'articles qualifiés : léger (L) , moyen (M) et fort (F) : 300L , 180 M et 240 F.

Pour écouler ces stockes , le responsable a élaboré deux types de lots constitués comme suit :

Lot 1 contient : 5L , 1M, 2F

Lot 2 contient   : 3L , 3M , 3F

Le bénéfice du lot 1 est 6 UM et lot 2 12 UM. Formuler ce problème.

Solution

x_1 la qté du lot 1

x_2 : : lot 2

$$MAX\ Z = 6x_1 + 12x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 1300 \\ 1x_1 + 3x_2 \leq 180 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 240 \end{cases}$$

$$x_1 ; x_2 \geq 0$$

EXERCICE : N°3 - FORMULATION

Une chaine de magasins pour dames vend des robes qui viennent de trois collections : « Prêt à porter » , « Femme au travail » et « Haute couture » , plus les robes sont dispendieuses , plus elles rapportent , toutefois elles demandent plus de temps de la part des vendeuses et elles requièrent des étalages plus élaborés.

Le directeur des achats exige pour avoir suffisamment de variétés au moins 1000 , 1100,1200 robes respectivement pour la $1^{ère}$,$2^{ème}$ et $3^{ème}$ collection. Il désire maximiser son profit et il doit tenir compte du fait que ses vendeuses travaillent durant 6400 heures et qu'il dispose de 10000m2 de plancher pour l'exposition.

Les données pertinentes sont comme suit :

collection	Profit /robe	Heures vendeuses par 1000 robes	Espace requis (m2/1000robes)
Prte a porter	5UM	300	200
Femme au travail	12UM	500	400
Haute couture	25UM	2000	800

Solution

x_1 la qté de robes "prêt à porter"

x_2 " " " " Femme au travail"

x_3 " " " " " Haute Couture"

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 12x_2 + 25x_3$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 1000 \\ x_2 \geq 1100 \\ x_3 \geq 1200 \\ 0{,}3x_1 + 0{,}5x_2 + 2x_3 \leq 6400 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}8x_3 \leq 10000 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

EXERCICE : N° 4 - FORMULATION

Un opérateur télécom lance un nouveau produit . Il décide d'organiser une campagne de communication en utilisant les deux supports de médiatiques Télé et radio. Le public cible est constitué de trois catégories dont les effectifs sont résumés dans le tableau suivant :

	CAT1	CAT2	CAT3	Cout d'un msg
Télé	10	25	9	10000UM
Radio	5	30	8	7000UM
effectif	9100	25000	9000	

Pour que cette campagne soit efficace elle doit toucher au moins 50% du CAT1 et 70% du CAT2 et 30% du CAT3. Modéliser ce problème.

Solution

x_1 le nbr de msg télé

x_2 le nbr de msg radio.

$$\text{Min } Z = 10000x_1 + 7000x_2$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 \geq 4550 & (50\%) \\ 25x_1 + 30x_2 \geq 17500 & (70\%) \\ 9x_1 + 8x_2 \geq 2700 & (30\%) \end{cases}$$

$$x_1 ; x_2 \geq 0$$

EXERCICE : N° 5 - FORMULATION

Un étudiant en agriculture veut déterminer les quantités de trois types de grains à donner au bétail afin de satisfaire ses besoins en nutrition au cout minimum. Le tableau suivant donne l'information nécessaire pour ce problème

Type de grains	Mais	Blé	Orge	Minimum requis
Protéine(mg/Kg)	10	9	11	20
Calcium(mg/Kg)	50	45	58	70
Fer(mg/Kg)	9	8	7	12
Calories(cal/Kg)	1000	800	850	4000
Cout/Kg en UM	5,5	4,7	4,5	

Solution

x_1 = la qté de Mais

x_2 = la qté de Blé

x_3 = la qté d'orge.

$$Min\ Z = 5{,}5x_1 + 4{,}7x_2 + 4{,}5x_3$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 + 11x_3 \geq 20 \\ 50x_1 + 45x_2 + 58x_3 \geq 70 \\ 9x_1 + 8x_2 + 7x_3 \geq 12 \\ 1000x_1 + 800x_2 + 850x_3 \geq 4000 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

<u>EXERCICE : N° 6 - FORMULATION</u>

Une entreprise de relation publique veut faire un sondage d'opinion.

Chaque employé peut faire chaque jour 80 interviews par téléphone ou 40 interviews direct.

Un employé ne peut faire qu'un seul de sondage type pendant une journée.

Afin d'avoir un échantillon représentatif on doit satisfaire les trois critères :

- Au moins 3000 interviews
- Au moins 1000 interviews par téléphone
- Au moins 800 interviews directe

L'employé conduisant les interviews par téléphone est payé 150 UM et L'employé conduisant les interviews directes est payés 170 UM.

Solution

x_1 le nbr d'employés qui font ds interviews par téléphone

x_2 le nbr d'employés qui font ds interviews directs.

$$\text{Min } Z = 150x_1 + 170x_2$$

$$\begin{cases} 80x_1 + 40x_2 \geq 3000 \\ 80x_1 \geq 1000 \\ 40x_2 \geq 800 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

EXERCICE : N° 7 - FORMULATION

Un agriculteur souhaite mélanger des engrais de façon à obtenir au minimum 15 unités de potasse, 20 unités de nitrates et 30 unités de phosphates. Il achète deux types d'engrais. Le type 1 procure 3 unités de potasse, 1 unité de nitrates et 3 unités de phosphates. Il coûte 120 dh. Le type 2 procure 1 unités de potasse, 5 unité de nitrates et 2 unités de phosphates . Il coûte 60 dh.
Modéliser le problème de l'agriculteur à l'aide d'un programme linéaire

Solution :

Soit x_1 la Qté d'engrais type 1

x_2 " " " " 2.

Son objectif est d'avoir minimum

15 unités de potasses

20 unités de nitrates

3 unités de phosphates.

$$\text{Min } Z = 120x_1 + 60x_2$$

potasses $\longrightarrow$ $3x_1 + 1x_2 \geq 15$

nitrates $\longrightarrow$ $1x_1 + 5x_2 \geq 20$

phosphates $\longrightarrow$ $3x_1 + 2x_2 \geq 3$

$x_1 ; x_2 \geq 0$

<u>EXERCICE : N° 8 - FORMULATION – Résolution graphique</u>

Un artisan fabrique deux articles A et B nécessitent chacun deux opérations : Un usinage et un traitement thermique . Le produit A subit un usinage d'une heure et un traitement thermique de 3H. B subit un usinage de 2H et un traitement thermique de 3H. de plus 2 Kg de matière première entrent dans la composition de A et 1 Kg dans celle de B.
La fabrication de B se termine par un travail de finition qui dure 1H.
L'artisan dispose de 80 H d'usinage , 150 H de traitement thermique , 35 H de finition et 80Kg de matière première.
La marge bénéficiaire est 30 DH pour l'article A est 25 DH pour l'article B.
1 – Formuler le programme linéaire qui permet de maximiser le bénéfice de l'artisan.
2 – Résoudre le problème par la méthode graphique. (en utilisant la méthode d'énumération des sommets.)
3 – Effectuer une analyse de sensibilité pour le bénéfice de l'article A.
4 – Quelles sont les ressources épuisées ?

Solution

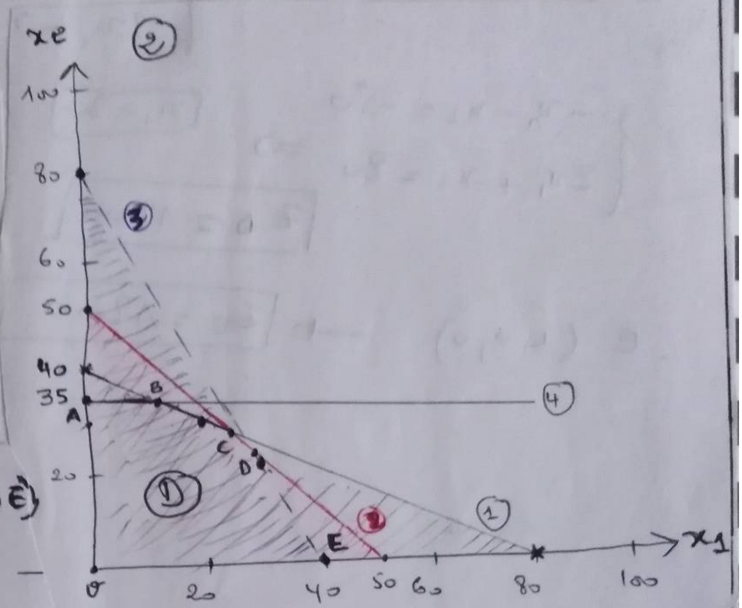
①

x_1 qté de A

x_2 qté de B.

$$\begin{cases} MAX\ Z = 30x_1 + 25x_2 \\ 1x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 150 \\ 2x_1 + 1x_2 \leq 80 \\ 1x_2 \leq 35 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0$



il y a 6 sommets (OABCDE)

• $O(0,0) \rightarrow \boxed{Z_O = 0}$

• $A(0,35) \rightarrow \boxed{Z_A = 875}$

• $B \in D_1 \cap D_4 \Rightarrow B \in D_1$

$x_1 + 2x_2 = 80$

$x_2 = 35 \Rightarrow x_1 = 10$

$B(10,35) \Rightarrow \boxed{Z_B = 1175}$

• $C \in D_1 \cap D_2 \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 80 \\ 3x_1 + 3x_2 = 150 \end{cases}$

$x_1 = 20 \quad x_2 = 30$

$\boxed{Z_C = 1350}$

• $D \in (D_2 \cap D_3) \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 150 \\ 2x_1 + 1x_2 = 80 \end{cases}$

$x_1 = 30 \quad x_2 = 20$

$\boxed{Z_D = 1400}$

• $E(40,0) \rightarrow \boxed{Z_E = 1200}$

$$\begin{cases} Z_O = 0 \\ Z_A = 875 \\ Z_B = 1175 \\ Z_C = 1350 \end{cases} \quad \begin{cases} Z_D = 1400 \\ Z_E = 1200 \end{cases}$$

donc $x_1^* = 30$ et $x_2^* = 20$

$\boxed{Z^* = 1400}$

3) Analyse de sensibilité :

$Z = 30x_1 + 25x_2$

$Z = (30+\lambda)x_1 + 25x_2$

D c'est la solution optimale

$D \in D_2 \cap D_3$

$D_2 : x_1 + x_2 = 50 \Rightarrow x_2 = -x_1 + 50$

$\boxed{P_1 = -1}$: la pente

$D_3 : 2x_1 + 1x_2 = 80 \Rightarrow x_2 = -2x_1 + 80$

$\boxed{P_2 = -2}$: la pente

$Z = 0 \Rightarrow (30+\lambda)x_1 + 25x_2 = 0$

$\Rightarrow 25x_2 = -(30+\lambda)x_1$

$x_2 = -\frac{30+\lambda}{25}x_1$

$P_Z = -\frac{30+\lambda}{25}$: la pente

tant que P_Z reste entre P_1 et P_2 la solution reste optimale.

$-2 \leq P_Z \leq -1$

$-2 \leq -\frac{(30+\lambda)}{25} \leq -1$

$-50 \leq -(30+\lambda) \leq -25$

$-50 \leq -30-\lambda \leq -25$

$-20 \leq -\lambda \leq 5$

$-5 \leq \lambda \leq 20$

$25 \leq 30+\lambda \leq 50.$

tant que le prix de A reste entre 25 et 50, la solution reste optimale.

4/ Les Ressources épuisées :

$x_1^* = 30 \quad x_2^* = 20$

usinage : $30 + 2(20) = 70. \leq 80$

TR. : $3(30) + 3(20) = 150 = 150$

M.P : $2(30) + 1(20) = 80 = 80$

H.F : $20. \leq 35$

les ressources qui sont épuisées sont :

- les heures de traitement thermique
- la matière première.

EXERCICE : N° 9 - Résolution simplexe - dualité

1)Résoudre par la méthode du simplexe

2) Formuler le programme dual et déduire la solution duale

$$\text{Max } Z = 100 X_1 + 150 X_2$$

$$\begin{cases} 10 X_1 + 4 X_2 \leqslant 160 \\ X_1 + X_2 \leqslant 20 \\ 10 X_1 + 20 X_2 \leqslant 300 \\ X_1 \geq 0 , X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Soit le p.L. $\quad Max\ Z = 100x_1 + 150x_2$

$$\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 \leq 160 \\ x_1 + x_2 \leq 20 \\ 10x_1 + 20x_2 \leq 300 \\ x_1 ; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1) Résolution simplexe :

Forme standard

$$Max\ Z = 100x_1 + 150x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

V.H.B $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ V.B $\begin{cases} e_1 = 160 \\ e_2 = 20 \\ e_3 = 300 \end{cases}$ $\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 + 1e_1 = 160 \\ x_1 + x_2 + 1e_2 = 20 \\ 10x_1 + 20x_2 + 1e_3 = 300 \\ x_1 ; x_2 ; e_1 ; e_2 ; e_3 \geq 0 \end{cases}$

TAB 1

C_j			100	150 (Ve)	0	0	0	
	VB	Qté	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	R_T
0	e_1	160	10	4	1	0	0	40
0	e_2	20	1	1	0	1	0	20
0	e_3	300	10	20	0	0	1	15 → Vs
	Z_j		0	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$			100	150	0	0	0	

TAB 2

C_j			100 (Ve)	150	0	0	0	
	VB	Qté	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	R_T
0	e_1	100	8	0	1	0	$-1/5$	$\frac{100}{8}$
0	e_2	5	1/2	0	0	1	$-1/20$	10
150	x_2	15	1/2	1	0	0	$1/20$	30
	Z_j		75	150	0	0	$15/2$	
$C_j - Z_j$			25	0	0	0	$-\frac{15}{2}$	

TAB 3

C_j			100	150	0	0	0	
	VB	Qté	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	
0	e_1	20	0	0	1	-16	$3/5$	
100	x_1	10	1	0	0	2	$-1/10$	
150	x_2	10	0	1	0	-1	$1/10$	
	Z_j		100	150	0	50	5	
$C_j - Z_j$			0	0	0	-50	-5	

tous les $C_j - Z_j \leq 0$

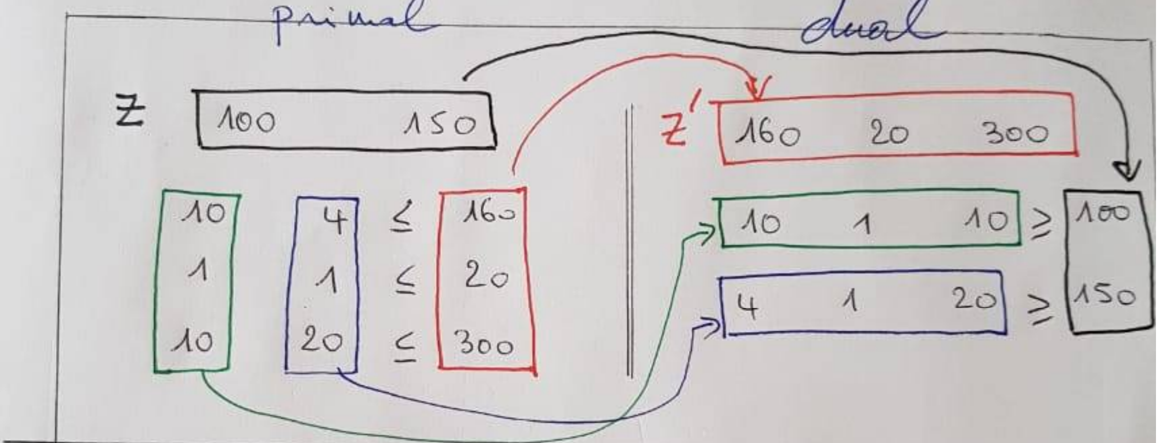
le tableau est optimale.

$$\begin{cases} x_1^* = 10 \\ x_2^* = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} e_1 = 20 \\ e_2 = 0 \\ e_3 = 0 \end{cases}$$

$Z^* = 2500.$

2) le programme dual :

Primal	Dual
$\text{Max } Z = 100x_1 + 150x_2$	$\text{Min } Z' = 160y_1 + 20y_2 + 300y_3$
$\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 \le 160 \\ 1x_1 + 1x_2 \le 20 \\ 10x_1 + 20x_2 \le 300 \end{cases}$	$\begin{cases} 10y_1 + 1y_2 + 10y_3 \ge 100 \\ 4y_1 + 1y_2 + 20y_3 \ge 150 \end{cases}$
$x_1 ; x_2 \ge 0$	$y_1 ; y_2 ; y_3 \ge 0.$



la solution duale : d'après le dernier tableau " tableau optimal " on a la dernière ligne " $C_j - Z_j$ "

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3
$C_j - Z_j$	0	0	0	-50	-5

$$\begin{cases} x_1 \to C_1 - Z_1 = 0 \\ x_2 \to C_2 - Z_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} e'_1 = 0 \\ e'_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_1 \to C_3 - Z_3 = 0 \\ e_2 \to C_4 - Z_4 = -50 \\ e_3 \to C_5 - Z_5 = -5 \end{cases} \to \begin{cases} y_1 = |0| = 0 \\ y_2 = |-50| = 50 \\ y_3 = |-5| = 5 \end{cases}$$

primal		Dual
$x_1^* = 10 ; x_2^* = 10$ $e_1 = 20 ; e_2 = 0 ; e_3 = 0$	$Z^* = 25000 = Z'^*$	$y_1^* = 0 ; y_2^* = 50$ $y_3^* = 5 ; e'_1 = 0 ; e'_2 = 0$

EXERCICE : N° 10 - Résolution graphique – résolution simplexe - dualité

Une entreprise produit deux modèles d'articles , l'un que l'on appellera modèle A exige 2 Kilogrammes de matière première et 30 heures de fabrication et donne un bénéfice de 700 dhs . l'autre que l'on appellera modèle B exige 4 Kilogrammes de matière première et 15 heures de fabrication et donne un bénéfice de 600 dhs. On dispose de 200 000 grammes de matière première et 1200 heures de travail.

Travail à faire

1 – Donner le programme qui permet à l'entreprise de maximiser son bénéfice.
2 – Résoudre le Problème par la Méthode graphique.
3 – Résoudre le Problème par la méthode du simplexe.
4 – Interpréter les résultats du programme primal.
5 - Déduire la solution optimale duale.
6 – Donner l'interprétation économique de votre solution optimale duale en termes de valorisation marginal des facteurs de productions primales.
7- si le Manager doit avoir des réserves sur une seule des ressources , laquelle doit il choisir ?
8- a – Effectuer une analyse de sensibilité pour le prix de l'article A , Interpréter les résultats obtenus .
b- Effectuer une analyse de sensibilité pour la quantité de matière première . Interpréter les résultats obtenus

Solution

1) le p.L qui permet de maximiser le bénéfice.

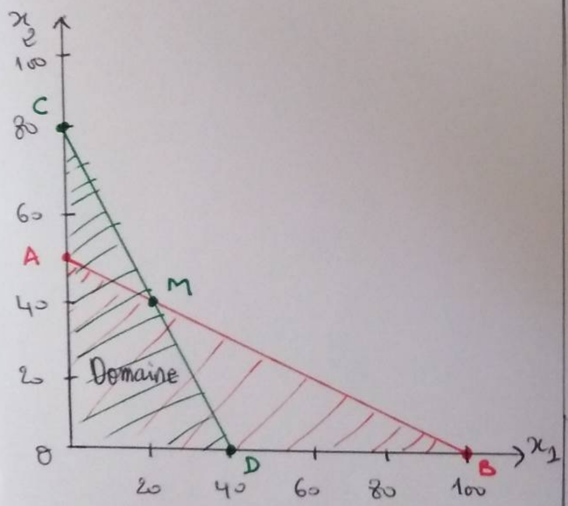
soit x_1 la Qté de A

x_2 " " B

$$\text{Max } Z = 700\,x_1 + 600\,x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 200 \\ 30x_1 + 15x_2 \leq 1200 \\ x_1 ; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2) Résolution graphique.



(D_1) : $2x_1 + 4x_2 = 200$

passe par A(0; 50) et B(100, 0)

(D_2) : $30x_1 + 15x_2 = 1200$

passe par C(0; 80) et D(40, 0).

Enumération des sommets

$O(0,0) \longrightarrow Z_O = 0$

$A(0,50) \rightarrow Z_A = 30.000$

$D(40,0) \longrightarrow Z_D = 28.000$

$M(20,40) \rightarrow Z_M = 38000$

M c'est l'intersection des deux droites D_1 et D_2.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 200 \\ 30x_1 + 15x_2 = 1200 \end{cases}$$

$\boxed{x_1 = 20}$ $\boxed{x_2 = 40}$

on remarque que le pt M qui maximise le domaine des solutions réalisables.

3) Résolution simplexe.

Forme standard.

$$\text{Max } Z = 700x_1 + 600x_2 + 0e_1 + 0e_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 1e_1 = 200 \\ 30x_1 + 15x_2 + 1e_2 = 1200 \\ x_1, x_2, e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

lorsque

V.H.B

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

V.B.

$\begin{cases} e_1 = 200 \\ e_2 = 1200 \end{cases}$

Tableau 1.

C_j			700	600	0	0	
	VB	$Q^{té}$	x_1	x_2	e_1	e_2	RT
0	e_1	200	2	4	1	0	100
0	e_2	1200	30	15	0	1	40
	Z_j	0	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$			700	600	0	0	

Ve

C_j			700	600	0	0	
	VB	$Q^{té}$	x_1	x_2	e_1	e_2	RT
0	e_1	120	0	3	1	$-1/15$	40
700	x_1	40	1	$1/2$	0	$1/30$	80
	Z_j		700	350	0	$70/3$	
$C_j - Z_j$			0	250	0	$-\frac{70}{3}$	

C_j			700	600	0	0
	VB	$Q^{té}$	x_1	x_2	e_1	e_2
600	x_2	40	0	1	$1/3$	$-1/45$
700	x_1	20	1	0	$-1/6$	$4/90$
	Z_j		700	600	$500/6$	$160/9$
$C_j - Z_j$			0	0	$-\frac{500}{6}$	$-\frac{160}{9}$

$x_1^* = 20$; $x_2^* = 40$

$e_1 = 0$, $e_2 = 0$

$Z^* = 38000.$

(4) Interprétation

pour maximiser le bénéfice de l'entreprise et atteindre 38000, il faut produire 20 articles modèle A et 40 articles modèle B.

en terme d'utilisation des ressources. on a

$\begin{cases} 2(20) + 4(40) = 200 \\ \text{la contrainte 1 est saturée.} \end{cases}$

$\begin{cases} 30(20) + 15(40) = 1200 \\ \text{la contrainte 2 est saturée.} \end{cases}$

donc il y a épuisement de la matière première et aussi les heures de fabrication.

(5) la solution duale

Dernier tableau.

x_1	x_2	e_1	e_2
0	0	$-500/6$	$-160/9$
$C_1 - Z_1$	$C_2 - Z_2$	$C_3 - Z_3$	$C_4 - Z_4$

$\begin{cases} C_1 - Z_1 = 0 \\ C_2 - Z_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} e'_1 = 0 \\ e'_2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} C_3 - Z_3 = -\frac{500}{6} \\ C_4 - Z_4 = \frac{-160}{9} \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = \left|-\frac{500}{6}\right| = \frac{500}{6} \\ y_2 = \left|-\frac{160}{9}\right| = \frac{160}{9}. \end{cases}$

le programme duale

$\text{Min} Z' = 200 y_1 + 1200 y_2$

$\begin{cases} 2y_1 + 30 y_2 \geq 700 \\ 4y_1 + 15 y_2 \geq 1200 \\ y_1 ; y_2 \geq 0. \end{cases}$

(6)

→ la valeur marginale d'un Kg de matière première est 500/6 Donc si on utilise une unité supplémentaire de matière première, la valeur de Z augmente de 500/6.

→ m̂ chose pour les heures de fabrication.

(7) le Manager doit choisir la ressource qui a la valeur marginale la plus élevée Donc il doit faire des réserves de matière première.

(8) (a) une analyse de sensibilité pour le prix de A.

$MAX\ Z = (700+\Delta)x_1 + 600x_2$

Dans le tableau optimal on modifie 700 par 700 + Δ et on refait le calcul de Z_j et $C_j - Z_j$..

et puisque le tableau est optimal alors $C_j - Z_j \leq 0$ à partir de cette inégalité on détermine l'intervalle de Δ et par la suite (700 + Δ).

C_j			$700+\Delta$	600	0	0
	VB	$Q^{té}$	x_1	x_2	e_1	e_2
600	x_2	40	0	1	1/3	-1/45
$700+\Delta$	x_1	20	1	0	-1/6	4/90
	Z_j		$700+\Delta$	600	$\frac{500}{6}-\frac{\Delta}{6}$	$\frac{160}{9}+\frac{4\Delta}{90}$
C_j-Z_j			0	0	$-\frac{500}{6}+\frac{\Delta}{6}$	$-\frac{160}{9}-\frac{4\Delta}{90}$

$C_j - Z_j \leq 0 \Rightarrow -\frac{500}{6}+\frac{\Delta}{6} \leq 0$

et $-\frac{160}{9}-\frac{4\Delta}{90} \leq 0$

$-\frac{500}{6}+\frac{\Delta}{6} \leq 0 \Rightarrow \Delta \leq 500$

$-\frac{160}{9}-\frac{4\Delta}{90} \leq 0 \Rightarrow \Delta \geq -400$

$-400 \leq \Delta \leq 500$

$\boxed{300 \leq \Delta + 700 \leq 1200}$

tant que le prix de A reste entre 300 et 1200, la solution est optimale.

(8) (b) on modifie la quantité de matière première

$200 \longrightarrow 200 + \Delta$

on s'intéresse à la colonne (e_1) "MP" dans le tableau optimale.

C_j			700	600	0	0
	VB	$Q^{té}$	x_1	x_2	e_1	e_2
600	x_2	$40+\frac{1}{3}\Delta$	0	0	1/3	-1/45
700	x_1	$20-\frac{1}{6}\Delta$	1	1	-1/6	4/90
	Z_j		700	600	500/6	160/9
C_j-Z_j			0	0	-500/6	-160/9

les quantités sont positives donc :

$x_2 \geq 0 \Rightarrow 40 + \frac{\Delta}{3} \geq 0$

$x_1 \geq 0 \Rightarrow 20 - \frac{\Delta}{6} \geq 0$

$40 + \frac{\Delta}{3} \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -120$

$20 - \frac{\Delta}{6} \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 120$

$-120 \leq \Delta \leq 120$

$80 \leq 200 + \Delta \leq 320$

la solution est optimale tant que la quantité de matière première reste entre 80 et 320.

EXERCICE : N° 11 - Rrésolution simplexe - dualité

Un fabricant produit deux types de yaourts A et B à partir de trois matières premières (fraise, lait , sucre) . Le type A nécessite 2 Kg de fraise et 4 kg de lait. Le type B nécessite 1 Kg de fraise, 2 kg de lait et 1Kg de sucre.
Les matières premières sont en quantité limitée : 800 Kg de fraise, 700 Kg de lait et 300 kg de sucre.
La vente de A rapporte 50 DH et la vente de B rapporte 60 DH.

1- Ecrire le programme linéaire qui permet de maximiser le bénéfice du fabricant.
2- Résoudre ce problème par la méthode du simplexe.
3- Ecrire le programme dual et déduire sa solution.
4- Si le fabricant souhaite diminuer la quantité de l'une des matières premières, laquelle doit-il choisir ? pourquoi ?
5- Quel est le prix maximum qu'il faut dépenser par le fabricant pour doubler la production du yaourts type A ?

Solution

1- La fabricant produit deux types de yaourts A et B.
Soit la qté X1de A et X2 de B

A X1 consomme 2 KG FRAISE , 4KG de LAIT et rapporte 50DH
B X2 consomme 1KG FRAISE , 2 KG de LAIT , 1 Kg de SUCRE et rapporte 60DH

$$\begin{cases} \text{Max } Z = 50\,X1 + 60\,X2 \\ 2X1 + 1X2 \leq 800 \\ 4X1 + 2X2 \leq 700 \\ \quad 1X2 \leq 300 \\ X1\ , X2 \geq 0 \end{cases}$$

2- Résolution simplexe
Forme standard

$$\begin{cases} \text{Max } Z = 50\,X1 + 60\,X2 + 0\,e1 + 0\,e2 + 0\,e3 \\ 2X1 + 1X2 + e1 = 800 \\ 4X1 + 2X2 + e2 = 700 \\ \quad 1X2 + e3 = 300 \\ X1\ , X2\ , e1\ , e2\ , e3 \geq 0 \end{cases}$$

Méthode des tableaux

Cj			50	60	0	0	0	
	VB	Q	X1	X2	e1	e2	e3	RT
0	e 1	800	2	1	1	0	0	800
0	e 2	700	4	2	0	1	0	350
0	e 3	300	0	1	0	0	1	300
	Zj		0	0	0	0	0	
	Cj - Zj		50	60	0	0	0	

Cj			50	60	0	0	0	
	VB	Q	X1	X2	e1	e2	e3	RT
0	e 1	500	2	0	1	0	-1	250
0	e 2	100	4	0	0	1	-2	25
60	X2	300	0	1	0	0	1	∞
	Zj		0	60	0	0	60	
	Cj - Zj		50	0	0	0	-60	

Cj			50	60	0	0	0	
	VB	Q	X1	X2	e1	e2	e3	RT
0	e 1	450	0	0	1	-1/2	0	
50	X1	25	1	0	0	1/4	-1/2	
60	X2	300	0	1	0	0	1	
	Zj		50	60	0	50/4	35	
	Cj - Zj		0	0	0	-50/4	-35	

Tous les Cj – Zj ≤0 , donc la solution est optimale.

$X_1^* = 25$ $X_2^* = 300$ $Z^* = 19250$

3 – le programme dual

$$\begin{cases} \text{Min } Z = 800\, Y1 + 700\, Y2 + 300\, Y3 \\ 2\, Y1 + 4\, Y2 \geq 50 \\ 1Y1 + 2Y2 + 1Y3 \geq 60 \\ Y1,\ Y2, Y3 \geq 0 \end{cases}$$

La solution duale :

$$\begin{cases} \begin{cases} C1 - Z1 = 0 \\ C2 - Z2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} C3 - Z3 = 0 \\ C4 - Z4 = -50/4 \\ C5 - Z5 = -35 \end{cases} \end{cases} \qquad \begin{cases} \begin{cases} Y1 = 0 \\ Y2 = 50/4 \\ Y3 = 35 \end{cases} \\ \begin{cases} e_1' = 0 \\ e_2' = 0 \end{cases} \end{cases}$$

4 – si le fabricant souhaite diminuer la quantité d'une ressource , il doit diminuer la matière qui n'est pas consommée.
En terme de consommation de matière première : On a X1 = 25 et X2 = 300
La consommation de fraise est (25*2) + (300*1) = 350 ≤ 800 donc il reste 450 Kg de fraise
La consommation de lait est (25*4) + (300*2)= 700 épuisement total.
La consommation de sucre est (25*0) + (300*1)= 300 épuisement total

Donc il doit diminuer la quantité de fraise.

5 – si le fabricant souhaite doubler la quantité de yaourt type A.
Donc il souhaite produire 25 unités de plus , qui consomme :

25* 2 Kg de fraise = 50 kg de fraise et 25*4 Kg de lait = 100 Kg de lait.
La valeur marginale de fraise est nulle (il reste déjà 450 Kg de fraise qui n'est pas consommée) et la valeur marginale de lait est 50/4 dh.
Donc il faut dépenser au maximum 100*50/4 = 1250dh.

<u>EXERCICE : N° 12 - Résolution simplexe - dualité</u>

Une compagnie d'alimentation dispose de 2000 Kg de café Africain , 3000 Kg de café brésilien et 500 Kg de café colombien. En utilisant ces trois produits la compagnie procède à des mélanges pour obtenir deux lots de café à commercialiser.

Lot de type 1 est composé de 6Kg de café Africain et 3 Kg de café brésilien et 1 Kg de café colombien ce type est vendu à 140 Dhs

Lot de type 2 est composé de 4 Kg de café Africain et 4 kg de café brésilien et 2 Kg de café colombien ce type est vendu à 170 Dhs.

1 – Ecrire le modèle de programmation linéaire correspondant à ce problème de manière à maximiser le bénéfice de la compagnie

2 – résoudre le problème par la méthode du simplexe

3 – Interpréter les résultats du programme primale

4 – Déduire la solution optimale duale

5 – Donner l'interprétation économique de votre solution optimale duale en termes de valorisation marginal des facteurs de productions primales

6 – Effectuer une analyse de sensibilité pour le prix de vente du lot type 1 . interpréter les résultats obtenus

Solution

Soit x_1 la Qté de lot type 1

x_2 " " " 2

$$\text{Max } Z = 140x_1 + 170x_2$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 2000 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 3000 \\ 1x_1 + 2x_2 \leq 500 \\ x_1 ; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2°) Résolution simplexe.

Forme standard

$$\text{Max } Z = 140x_1 + 170x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + e_1 = 2000 \\ 3x_1 + 4x_2 + e_2 = 3000 \\ 1x_1 + 2x_2 + e_3 = 500 \\ x_1 ; x_2 ; e_1 ; e_2 ; e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Ve

C_j			140	170	0	0	0	
	VB	Qté	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	RT
0	e_1	2000	6	4	1	0	0	500
0	e_2	3000	3	4	0	1	0	750
0	e_3	500	1	2	0	0	1	250
Z_j			0	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$			140	170	0	0	0	

lorsque

V.H.B $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

V.B $\begin{cases} e_1 = 2000 \\ e_2 = 3000 \\ e_3 = 500 \end{cases}$

C_j			140	170	0	0	0	
	VB	Qté	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	RT
0	e_1	1000	4	0	1	0	-2	250
0	e_2	2000	1	0	0	1	-2	2000
170	x_2	250	1/2	1	0	0	1/2	500
Z_j			170/2	170	0	0	170/2	
$C_j - Z_j$			110/2	0	0	0	-170/2	

C_j			140	170	0	0	0
	VB	Qté	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3
140	x_1	250	1	0	1/4	0	-1/2
0	e_2	1750	0	0	-1/4	1	-3/2
170	x_2	125	0	1	-1/8	0	3/4
Z_j			140	170	110/8	0	230/4
$C_j - Z_j$			0	0	-110/8	0	-230/4

tous les $C_j - Z_j \leq 0$, donc la solution est optimale.

$x_1^* = 250$; $x_2^* = 125$

$e_1 = 0$; $e_2 = 1750$; $e_3 = 0$

$Z^* = 56250$.

3) pour maximiser le bénéfice de la Compagnie en respectant toutes les Contraintes de production, il faut produire 250 lots type 1 et 125 lot type 2.

→ la contrainte 1 est saturée ($e_1 = 0$)

→ la contrainte 2 n'est pas saturée ($e_2 = 1750$)

→ la contrainte 3 est saturée ($e_3 = 0$).

④ la solution duale.

$x_1 \rightarrow C_1 - Z_1 = 0 \longrightarrow e'_1 = 0$

$x_2 \rightarrow C_2 - Z_2 = 0 \longrightarrow e'_2 = 0$

$e_1 \rightarrow C_3 - Z_3 = -\frac{110}{8} \longrightarrow y_1 = \frac{110}{8}$

$e_2 \rightarrow C_4 - Z_4 = 0 \longrightarrow y_2 = 0$

$e_3 \rightarrow C_5 - Z_5 = -\frac{230}{4} \longrightarrow y_3 = \frac{230}{4}$

la solution duale

$$y_1^* = \frac{110}{8} \; ; \; y_2^* = 0 \; ; \; y_3^* = \frac{230}{4}$$

$$e'_1 = 0 \; ; \; e'_2 = 0$$

$$Z'^* = 56250.$$

le programme dual

$$\text{Min } Z' = 2000 y_1 + 3000 y_2 + 500 y_3$$

$$\begin{cases} 6y_1 + 3y_2 + 1y_3 \geq 140 \\ 4y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 170 \end{cases}$$

$$y_1 ; y_2 ; y_3 \geq 0$$

Interprétation

- pour le café Africain (e_1) la valeur marginale $\left(\frac{110}{8}\right)$ si on utilise 1kg de plus, Z augmente de 110/8.
- pour le café brésilien (e_2) la valeur marginale (0), Après production, il reste encore 1750 kg.
- pour le café colombien (e_3) la valeur marginale $\left(\frac{230}{4}\right)$ donc si on utilise 1kg supplementaire Z augmente de $\left(\frac{230}{4}\right)$..

⑤ si le Manager souhaite avoir des réserves sur un seul type de café, il doit choisir le café colombien parce que c'est le café qui a la valeur marginale la plus élevée.

EXERCICE : N° 13 - Résolution simplexe - dualité

La société JET produit deux types de peintures A et B, à partir de trois matières premières M_1 , M_2 et M_3.

Peinture type A nécessite 10 Kg de M_1 , 2 Kg de M_2 et 1 Kg de M_3 . Son prix de vente est 1200 Dhs.

Peinture type B nécessite 5 Kg de M_1 et 3 Kg de M_2. Son prix de vente est 1000 Dhs.

La société dispose de 200 Kg de M_1 , 60 Kg de M_2 et 34 Kg de M_3.

1 – Ecrire le programme linéaire qui permet de maximiser le bénéfice de la société.

2 – Résoudre le problème par la méthode du simplexe, interpréter les résultats obtenus.

3 – Ecrire le programme dual et déduire sa solution

4 – Effectuer une analyse de sensibilité pour le prix de vente de la peinture type B.

5 – Une entreprise concurrente demande à la société JET de lui vendre 50 % de la matière M_1 (et ce, bien entendu avant que la fabrication ne soit lancée) . A quel prix minimum la société JET devra t - elle vendre cette quantité ? Expliquer clairement votre raisonnement

6 – Supposons qu'un troisième type C est proposé par le département de production, et qui nécessite 2kg de M_1 et 3Kg de M_2 , et son prix de vente est 650 Dhs. Tenant compte de la valeur marginale de M_1 et M_2 , est-ce que la société JET doit produire ce type ? Expliquer clairement votre raisonnement

Solution

1°) le programme linéaire qui permet de maximiser le bénéfice de l'entreprise

Soit X1 la quantité de la peinture type A et X2 la quantité de la peinture type B

$$\begin{cases} \text{Max } Z = 1200\,X1 + 1000X2 \\ 10X1 + 5X2 \leqslant 200 \\ 2X1 + 3X2 \leqslant 60 \\ 1\,X1 \leqslant 34 \\ X1\,;\,X2 \geq 0 \end{cases}$$

2°) Résolution simplexe

Forme standard : on introduit trois variables d'écarts e1 , e2 et e3

$$\begin{cases} \text{Max } Z = 1200\,X1 + 1000X2 + 0\,e1 + 0\,e2 + 0\,e3 \\ 10X1 + 5X2 + e1 = 200 \\ 2X1 + 3X2 + e2 = 60 \\ 1X1 + e3 = 34 \\ X1\,,\,X2\,,\,e1\,,\,e2\,,\,e3 \geq 0 \end{cases}$$

Ve

Cj			1200	1000	0	0	0	
	VB	Q	X1	X2	e 1	e 2	e 3	RT
0	e 1	200	10	5	1	0	0	20

0	e 2	60	2	3	0	1	0	30
0	e 3	34	1	0	0	0	0	34
	Zj		0	0	0	0	0	
	Cj - Zj		1200	1000	0	0	0	

Cj			1200	1000	0	0	0	
	VB	Q	X1	X2	e 1	e 2	e 3	RT
1200	X1	20	1	1/2	1/10	0	0	40
0	e 2	20	0	2	-1/5	1	0	10
0	e 3	14	0	-1/2	-1/10	0	1	-28
	Zj		1200	600	120	0	0	
	Cj - Zj		0	400	- 120	0	0	

Cj			1200	1000	0	0	0	
	VB	Q	X1	X2	e 1	e 2	e 3	
1200	X1	15	1	0	3/20	-1/4	0	
1000	X2	10	0	1	-1/10	1/2	0	
0	e 3	19	0	0	-3/10	1/4	1	
	Zj		1200	1000	80	200	0	
	Cj - Zj		0	0	-80	-200	0	

Tous les Cj-Zj ⩽ 0 donc la solution est optimale , X1 = 15 ; X2 = 10 et Z = 1200*15 + 1000*10 = 28000. Pour maximiser le bénéfice de l'entreprise , il faut produire 15 unités de type A et 10 unités de type B.

3°) Le programme dual

Y1 la valeur d'un Kg de M1 ; Y2 la valeur d'un Kg de M2 ; Y3 la valeur d'un Kg de M3

$$\begin{cases} \text{Min } Z = 200\,y1 + 60\,y2 + 34\,y3 \\ 10y1 + 2y2 + 1y3 \geq 1200 \\ 5y1 + 3y2 \geq 1000 \\ y1 \,;\, y2 \,;\, y3 \geq 0 \end{cases}$$

la solution duale :

d'après le dernier tableau (tableau optimal) on a :

C4 – Z4 = -80 ; C5 – Z5 = -200 ; C6 – Z6 = 0

donc y1 = 80 ; y2 = 200 ; y3 = 0 et Z = 28000.

4°) Analyse de sensibilité pour le prix de vente de la peinture type B , d'après le dernier tableau on a :

Cj			1200	1000+Δ	0	0	0	
	VB	Q	X1	X2	e 1	e 2	e 3	
1200	X1	15	1	0	3/20	-1/4	0	
1000+Δ	X2	10	0	1	-1/10	1/2	0	
0	e 3	19	0	0	-3/10	1/4	1	
	Zj		1200	1000+Δ	80-Δ/10	200+Δ/2	0	
	Cj - Zj		0	0	-80+Δ/10	-200-Δ/2	0	

La solution reste optimale si tous les Cj-Zj ⩽0 , donc :

$-80+\Delta/10 \leqslant 0$ donc $\Delta \leqslant 800$

$-200-\Delta/2 \leqslant 0$ donc $\Delta \geq -400$ donc $-400 \leqslant \Delta \leqslant 800$ donc $600 \leqslant \Delta+1000 \leqslant 1800$

Tant que le prix de la peinture type B reste entre 600 et 1800 , alors la solution est optimale.

<u>5°) prix minimum de la vente de 50% de M1</u>

la valeur marginale de M1 est 80 ,

la société ne peut accepter qu'une valeur supérieure ou égale à 80 pour un Kg de M1 , donc minimum 80 pour 1 Kg de M1 ,

la société dispose de 200 Kg de M1 , alors 50 % de M1 c'est 100 Kg

donc le prix minimum pour vendre 50% (100Kg) c'est 100 * 80 = ***<u>8000 Dhs</u>***

<u>6°) production d'un troisième type C</u>

le troisième type C demande 2Kg de M1 et 3Kg de M2 .

donc la valeur marginale de (2Kg de M1 et 3Kg de M2) c'est 2*80 + 3*200 = 760 Dhs

si la société JET utilise la quantité (3Kg de M2 et 2Kg de M1) dans la production de type A et type B

le revenu est 760 Dhs , mais s'elle utilise la quantité (3Kg de M2 et 2Kg de M1) pour le type C le revenu c'est 650 Dhs , donc **<u>la société ne doit pas produire le type C</u>**.