

Probabilités
Rappel de cours et
Exercices corrigés

Ensemble gétro
M. Hilal

→ Lois usuelles discrètes

Nous présenterons dans ce qui suit :

- la loi binomiale
- la loi hypergéométrique
- la loi de Poisson

I. Loi binomiale

- ① • On considère une population ou une proportion p (ou pourcentage p) d'individus possédant un certain caractère (appelons A ce caractère).
 - On tire au hasard et avec remise un échantillon de taille n (dans cette population).
 - Soit la grandeur $X =$ "nombre d'individus possédant le caractère A dans l'échantillon".
- X est une variable aléatoire dont les valeurs possibles sont $0, 1, 2, \dots, n$
- la loi de probabilité de X est définie par :

$$P(X=x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \quad x=0,1,\dots,n \quad (2)$$

Rappel

on écrit $X \longrightarrow B(n, p)$ (lire: X suit une loi binomiale de paramètres n et p)

$$C_m^p = \frac{m!}{p!(m-p)!}$$

$$m! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (m-1) \times m$$

petit exemple $2! = 1 \times 2 = 2$

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

ou bien $5! = 4! \times 5 = 24 \times 5 = 120$

* Caractéristiques de la loi

1/ espérance mathématique

$$\text{si } X \longrightarrow B(n, p)$$

$$E(X) = np$$

2/ variance

$$V(X) = np(1-p)$$

Si on pose $q = 1-p$, on aura $V(X) = npq$

3/ Ecart-type

l'écart-type de X est $\sigma(X)$:

(3)

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{npq}$$

(on peut le noter tout simplement σ)
↓
sigma

* Exemple d'application

Dans un ensemble d'étudiants, 30% sont
gauchistes.

On tire au hasard et avec remise 10 étudiants.

Soit X = nombre de gauchistes dans l'échantillon
tiré

1/ Donner la loi de X

2/ Calculer son espérance mathématique
et sa variance

3/ Calculer i/ $P(X=0)$, ii/ $P(X=1)$; iii/ $P(X \geq 2)$

on a $n = 10$; $p = 0,3$

1/ loi de X

$$X \longrightarrow B(10; 0,3)$$

$$P(X=x) = C_{10}^x (0,3)^x (0,7)^{10-x}$$

$x = 0, 1, \dots, 10$

2/ • espérance mathématique

$$E(X) = np = 10 \times 0,3$$

$$E(X) = 3$$

• Variance $V(X) = np(1-p) = 10 \times 0,3 \times 0,7$

$$V(X) = 2,1$$

(4)

$$3/ \text{ i/ } P(X=0) = C_{10}^0 (0,3)^0 (0,7)^{10} \\ = 1 \times 1 \times (0,7)^{10} = (0,7)^{10}$$

$$P(X=0) = (0,7)^{10} \approx 0,0282$$

$$\text{ii/ } P(X=1) = C_{10}^1 (0,3)^1 (0,7)^9 \\ = 10 \times 0,3 \times (0,7)^9$$

$$P(X=1) \approx 0,1211$$

$$\text{iii/ } P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) \\ = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) \\ = 1 - (0,0282 + 0,1211) \\ = 1 - 0,1493$$

$$P(X \geq 2) = 0,8507$$

⊛ II. Loi hypergéométrique

⊛ Dans une population de taille N on a une proportion p d'individus possédant un caractère A , on tire au hasard et sans remise un échantillon de taille n .

Soit X = "nombre d'individus qui possèdent le caractère A dans l'échantillon tiré",

on remarque que le contexte dans lequel est

défini cette variable ressemble à celui dans lequel est définie la variable binomiale avec la seule différence que le tirage 'ici', est effectué avec remise et qu'on précise la taille N de la population.
 X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par :

$$P(X = u) = \frac{C_{Np}^u C_{N(1-p)}^{n-u}}{C_N^n}$$

$$\max(0, n - Nq) \leq n \leq \min(n, Np)$$

on note $X \rightarrow H(N, n, p)$

(lire: X suit une loi hypergéométrique de paramètres N , n et p .)

* Caractéristiques d'une loi hypergéométrique

i/ espérance mathématique

$$E(X) = np$$

ii/ variance

$$V(X) = np(1-p) \frac{N-n}{N-1}$$

$\frac{N-n}{N-1}$ est appelé 'facteur d'exhaustivité'

iii/ écart-type

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p) \frac{N-n}{N-1}}$$

* Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale (6)

Soit $X \longrightarrow H(N, n, p)$

Si $n \ll N$ (n est trop petit devant N)

Alors la loi hypergéométrique $H(N, n, p)$ est remplacée (approximée) par une loi binomiale $B(n, p)$

Rq $n \ll N$ peut être vérifiée si $n \leq \frac{N}{10}$

Exple

Dans un ensemble de 120 étudiants, 24 sont doublants. On tire, au hasard et sans remise, 8 étudiants.

Soit $X =$ « nombre d'étudiants doublants dans l'échantillon »

1/ Donner la loi de X

2/ Calculer $E(X)$ et $V(X)$

3/ Calculer : i/ $P(X=0)$; ii/ $P(X=1)$; iii/ $P(X \geq 2)$

* Exemple d'application

Une salle de classe contient 12 garçons et 8 filles. On tire au hasard et sans remise 4 individus dans cette salle.
Soit X = "nombre de garçons dans l'échantillon tiré"

- 1/ Donner la loi de X
- 2/ Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$
- 3/ Calculer i/ $P(X=0)$, $P(X=1)$

on a

$$N = 20$$

avec tirage sans remise.

$$n = 4$$

$$p = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$p = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0,6$$

1/ loi de X

$$X \rightarrow H\left(20; 4; 0,6\right)$$
$$C_{12}^n C_8^{4-n}$$

$$P(X=n) = \frac{C_{12}^n C_8^{4-n}}{C_{20}^4} \quad (n=0,1,2,3,4)$$

$$2/ \text{ i/ } E(X) = np = 4 \times 0,6 = \underline{2,4}$$
$$\text{ ii/ } V(X) = npq \frac{N-n}{N-1} = 4 \times 0,6 \times 0,4 \times \frac{20-4}{20-1}$$
$$= 0,96 \times \frac{16}{19}$$

$$V(X) = 0,8084 \approx 0,81$$

$$\text{ iii/ } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,81} = \underline{0,9}$$

$$3/ \text{ i/ } P(X=0) = \frac{C_{12}^0 C_8^4}{C_{20}^4} = \frac{1 \times 70}{4845} = \frac{70}{4845} \quad (8)$$

$$\text{ii/ } P(X=1) = \frac{C_{12}^1 C_8^3}{C_{20}^4} = \frac{12 \times 42}{4845} = \frac{504}{4845} = \underline{\underline{0,104}}$$



III. loi de Poisson

a/ Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson si

$$P(X=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

λ est un nombre réel appelé paramètre de la loi de Poisson, on note

$$X \longrightarrow P(\lambda)$$

(lire: X suit une loi de Poisson de paramètre λ)

b/ Caractéristiques d'une loi de Poisson

$$\begin{aligned} \text{i/ } E(X) &= \lambda \\ \text{ii/ } V(X) &= \lambda \\ \text{iii/ } \sigma(X) &= \sqrt{\lambda} \end{aligned}$$

c/ Approximation d'une loi binomiale (9)

par une loi de Poisson

Soit $X \rightarrow B(n, p)$

Si i) n est grand ($n > 50$)
ii) p est faible ($p < 0,1$)

Alors on peut approximer (= remplacer) la loi binomiale de X , $B(n, p)$ par une loi

Poisson de paramètre $\lambda = np$

on écrit $X \rightsquigarrow P(np)$
avec $P(X=x) = e^{-np} \frac{(np)^x}{x!}$

$x = 0, 1, \dots$

Exemple d'application

Dans une production de pièces mécaniques par une entreprise, 5% de pièces sont défectueuses. On tire au hasard 80 pièces et on désigne par X le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon tiré.
1/ Donner la loi de X

2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$

(10)

3) Calculer i/ $P(X=0)$, ii/ $P(X=1)$, iii/ $P(X \geq 3)$

$$n = 80 \quad ; \quad p = 0,05$$

X = nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon

1/ Loi de X

$$X \longrightarrow B(80; 0,05)$$

$$P(X = x) = C_{80}^x (0,05)^x (0,95)^{80-x}$$
$$x = 0, 1, 2, \dots, 80$$

$$2/ \cdot E(X) = np = 80 \times 0,05 = \underline{\underline{4}}$$

$$\cdot V(X) = np(1-p) = 80 \times 0,05 \times 0,95$$

$$\underline{\underline{V(X) = 3,8}}$$

3) puisque - n est grand ($n > 50$)
- p est faible ($p < 0,1$)

on peut approximer la loi binomiale de X
par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 3,8$

$$X \sim P(3,8)$$

$$P(X = x) = e^{-3,8} \frac{(3,8)^x}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

$$i) P(X=0) = e^{-3,8} \frac{(3,8)^0}{0!} = e^{-3,8} = \underline{\underline{0,0224}} \quad (M)$$

$$ii) P(X=1) = e^{-3,8} \frac{(3,8)^1}{1!} = 3,8 e^{-3,8} = \underline{\underline{0,0850}}$$

$$iii) P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) \\ = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2))$$

$$P(X=2) = e^{-3,8} \frac{(3,8)^2}{2!} = 7,22 e^{-3,8} = \underline{\underline{0,1615}}$$

$$\text{Donc } P(X \geq 3) = 1 - (0,0224 + 0,0850 + 0,1615)$$

$$= 1 - 0,2689$$

$$P(X \geq 3) \approx 0,7311$$

Exercices corrigés

Exercice 1

Soient A, B, C trois événements tels que

$$P(A) = 0,6 \quad ; \quad P(B) = 0,7 \quad ; \quad P(A \cup B) = 0,89$$

Calculer

$$i) P(A/B) \quad ; \quad ii) P(\bar{A}/B) \quad ; \quad iii) P(B/A)$$

$$iv) P(A/\bar{B}) \quad ; \quad v) P(B/\bar{A}) \quad ; \quad vi) P(A \cap B / A)$$

(12)

$$i/ P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(B)}$$

$$= \frac{0,6 + 0,7 - 0,89}{0,7} = \frac{0,41}{0,7}$$

$$P(A/B) = 0,5857$$

$$ii/ P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B) = 1 - 0,5857$$

$$P(\bar{A}/B) = 0,4143$$

$$iii/ P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,41}{0,6} = 0,6833$$

$$iv/ P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$$

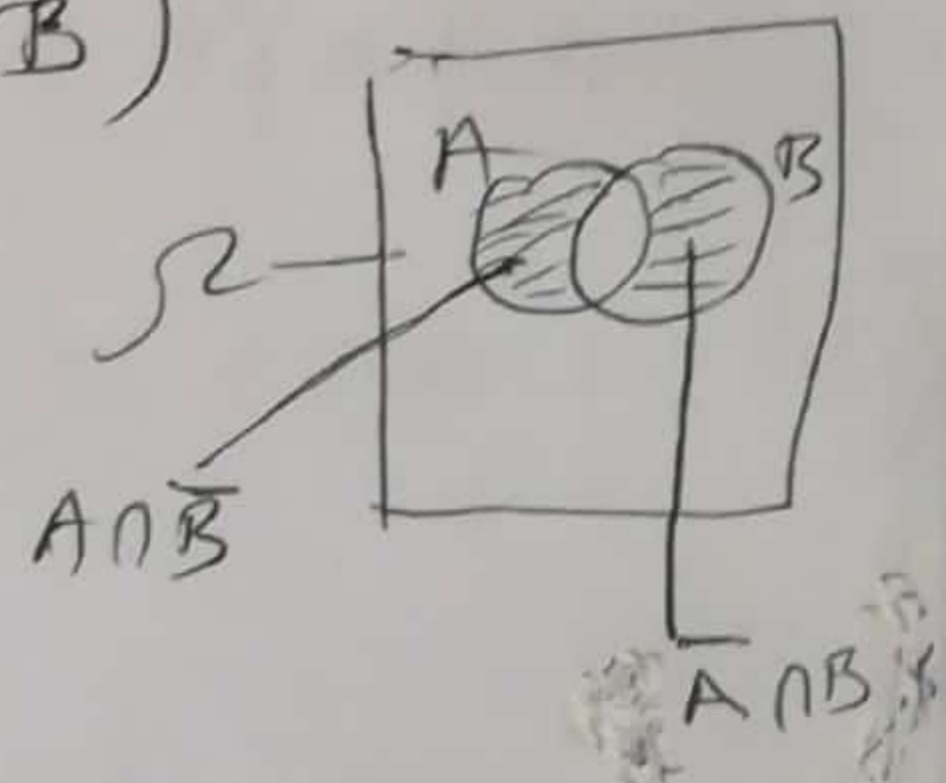
$$= \frac{0,6 - 0,41}{1 - 0,7}$$

$$= \frac{0,19}{0,3}$$

$$P(A/\bar{B}) = 0,6333$$

$$v/ P(B/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)}$$

$$= \frac{0,7 - 0,41}{1 - 0,6} = \frac{0,29}{0,4}$$



Exercice 2

(13)

Soient les événements A , B et C tels que

$$P(A) = 0,40 \quad ; \quad P(B) = 0,31 \quad \quad P(C) = 0,36$$

$$P(A \cap B) = 0,15 \quad ; \quad P(A \cap C) = 0,20 \quad ; \quad P(B \cap C) = 0,22$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0,08$$

Calculer

i/ $P(A \cup B \cup C)$ ii/ $P(A/B)$; iii/ $P(A/\bar{B})$

iv/ $P(C/A)$; v/ $P(A/A \cup C)$; vi/ $P(B/(A \cap B))$

$$\begin{aligned} \text{i/ } P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) \\ &\quad - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ &= (0,40 + 0,31 + 0,36) - (0,15 + 0,20 + 0,22) \\ &\quad + 0,08 \\ &= 1,07 - 0,57 + 0,08 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A \cup B \cup C) = 0,58}$$

$$\text{ii/ } P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,15}{0,31} =$$

$$\text{iii/ } P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$$

$$= \frac{0,40 - 0,15}{1 - 0,31} = \frac{0,25}{0,69}$$

(14)

$$P(A/\bar{B}) \approx 0,3623$$

$$\text{iv/ } P(C/A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{0,20}{0,36} = 0,5556$$

$$P(C/A) = 0,5556$$

$$\text{v/ } P(A/(A \cup C)) = \frac{P(A)}{P(A \cup C)} = \frac{P(A)}{P(A) + P(C) - P(A \cap C)}$$

$$= \frac{0,40}{0,40 + 0,36 - 0,20} = \frac{0,40}{0,56}$$

$$P(A/(A \cup C)) \approx 0,7143$$

Rappel

$$X \subset (X \cup Y)$$

$$(X \cap Y) \subset X$$

$$\text{vi/ } P(B/(A \cap B)) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = 1$$

Exercice 3

Sur une voie publique, 3% des voitures sont immatriculées à l'étranger. On observe 150 voitures et on considère $X = \text{nombre}$

$$\begin{aligned} B \cap (A \cap B) &= B \cap (B \cap A) \\ &= (B \cap B) \cap A \\ &= B \cap A \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

de voitures immatriculées à l'étranger dans l'échantillon observé.

(15)

- 1/ Donner la loi de X
- 2/ Calculer $E(X)$ et $V(X)$
- 3/ Calculer la probabilité que, dans l'échantillon observé:
 - i/ aucune voiture n'est immatriculée à l'étranger
 - ii/ deux voitures sont immatriculées à l'étranger
 - iii/ au moins trois voitures sont immatriculées à l'étranger

on a

$$n = 150 \quad ; \quad p = 0,03$$

X = nombre de voitures immatriculées à l'étranger

1/ loi de X

$$X \longrightarrow B(150; 0,03)$$

$$P(X = x) = C_{150}^x (0,03)^x (0,97)^{150-x}$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, 150$$

2/ Calcul de l'espérance mathématique et la variance

$$E(X) = np = 150 \times 0,03$$

(16)

$$\underline{E(X) = 4,5}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= np(1-p) = 150 \times 0,03 \times 0,97 \\ &= 4,365 \approx \underline{\underline{4,36}} \end{aligned}$$

3/ Puisque

i/ n est grand ($n \geq 50$)

ii/ p est faible ($p < 0,1$)

on peut donc approximer la loi binomiale $B(150; 0,03)$ par la loi de Poisson $P(4,5)$

on a donc

$$P(X=x) = e^{-4,5} \frac{(4,5)^x}{x!}$$

$$x = 0, 1, 2, \dots$$

$$i/ P(X=0) = e^{-4,5} \cdot \frac{(4,5)^0}{0!} = e^{-4,5}$$

$$P(X=0) = e^{-4,5} \approx 0,0111$$

$$ii/ P(X=2) = e^{-4,5} \frac{(4,5)^2}{2!} = 10,125 e^{-4,5}$$

$$P(X=2) \approx 0,1125$$

(17)

$$\text{iii) } P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$$

$$= 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2))$$

$$P(X=1) = e^{-4,5} \frac{(4,5)^1}{1!} = 4,5 e^{-4,5}$$

$$P(X=1) = 0,0500$$

$$\text{Donc } P(X \geq 3) = 1 - (0,0111 + 0,05 + 0,1125) \\ = 1 - 0,1736$$

$$P(X \geq 3) = 0,8264$$

Il y a 82,64% de chance que le nombre de voitures assurées à l'étranger soit au moins égal à 3

Exercice 4

Dans une classe de 200 étudiants, les notes obtenues à l'examen de statistique se répartissent comme suit (cette répartition a été observée un grand nombre de fois et on considère ici la moyenne de ces observations) :

note obtenue	2	5	7	10	12	15	18
Nombre d'étudiants	15	20	45	64	32	17	7

Si on désigne par X la note obtenue par un étudiant, (18)

- 1/ Donner la loi de probabilité de X
- 2/ Calculer $E(X)$ et $V(X)$
- 3/ Donner la fonction de répartition de X , $F(x)$
- 4/ Calculer la probabilité que la note d'un étudiant pris au hasard soit
 - i/ supérieure à 10
 - ii/ au moins égale à 7 sachant qu'elle ne dépasse pas 15
 - iii/ située entre 5 et 15 (bornes incluses) sachant qu'elle doit être entre 7 et 18 (bornes incluses)

Soit X = note d'un étudiant à l'examen de statistique

1/ Loi de X

$X=x$	2	5	7	10	12	15	18
$P(X=x)$	0,075	0,1	0,225	0,32	0,16	0,085	0,035

2/ • $E(X) = \sum_x x \cdot P(X=x)$

$$= (2 \times 0,075) + (5 \times 0,1) + (7 \times 0,225) + (10 \times 0,32) + (12 \times 0,16) + (15 \times 0,085) + (7 \times 0,035) \quad (19)$$

$$= 0,15 + 0,5 + 1,575 + 3,2 + 1,92 + 1,275 + 0,245 = 8,865$$

$$E(X) \approx 8,86$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \sum_n x^2 \cdot P(X=n)$$

$$= (4 \times 0,075) + (25 \times 0,1) + (49 \times 0,225) + (100 \times 0,32) + (144 \times 0,16) + (225 \times 0,085) + (324 \times 0,035) = 0,3 + 2,5 + 11,025 + 32 + 23,04 + 19,125 + 23,04 = 87,99$$

$$V(X) = 87,99 \approx 88$$

3/ Fonction de répartition de X , $F(u)$

$$F(u) = P(X \leq u), \quad u \in \mathbb{D}_X$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ 0,075 & \text{si } 2 < x \leq 5 \\ 0,175 & \text{si } 5 < x \leq 7 \\ 0,4 & \text{si } 7 < x \leq 10 \\ 0,72 & \text{si } 10 < x \leq 12 \\ 0,88 & \text{si } 12 < x \leq 15 \\ 0,965 & \text{si } 15 < x \leq 18 \\ 1 & \text{si } x > 18 \end{cases}$$

4/ i/ la probabilité demandée est

$$\begin{aligned} P(X > 10) &= 1 - P(X \leq 10) \\ &= 1 - P(X < 12) = 1 - F(12) \\ &= 1 - 0,72 \end{aligned}$$

$P(X > 10) = 0,28$

ii/ la probabilité demandée est

$$\begin{aligned} P(X \geq 7 / X \leq 15) &= \frac{P(7 \leq X \leq 15)}{P(X \leq 15)} \\ &= \frac{P(X \leq 15) - P(X < 7)}{P(X \leq 15)} = \frac{P(X < 18) - P(X < 7)}{P(X < 18)} \\ &= \frac{F(18) - F(7)}{F(18)} = \frac{0,965 - 0,175}{0,965} \end{aligned}$$

$$= \frac{0,79}{0,965} = 0,8187$$

(21)

$$P(X \geq 7 / X \leq 15) = 0,8187$$

iii/ la probabilité demandée est

$$\begin{aligned} & P(5 \leq X \leq 15 / 7 \leq X \leq 18) \\ &= \frac{P((5 \leq X \leq 15) \cap (7 \leq X \leq 18))}{P(7 \leq X \leq 18)} \\ &= \frac{P(7 \leq X \leq 15)}{P(7 \leq X \leq 18)} \\ &= \frac{P(X \leq 15) - P(X < 7)}{P(X \leq 18) - P(X < 7)} \\ &= \frac{P(X < 18) - P(X < 7)}{P(X < \infty) - P(X < 7)} = \frac{F(18) - F(7)}{F(\infty) - F(7)} \\ &= \frac{0,965 - 0,175}{1 - 0,175} = \frac{0,79}{0,825} \end{aligned}$$

$$P(5 \leq X \leq 15 / 7 \leq X \leq 18) \approx 0,9576$$